

Оптимизация, системный анализ и исследование операций

© 2025 г. В.В. МЕНЬШИХ, д-р физ.-мат. наук (mensikh@list.ru),
В.А. НИКИТЕНКО (vitalijnikitenko82043@gmail.com)
(Воронежский институт МВД России)

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ СИНТЕЗА МОДЕЛЕЙ НА ОСНОВЕ ГРАФИЧЕСКОГО ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АВТОМАТОВ

Рассматриваются вопросы моделирования объектов и систем на основе графического представления автоматов с использованием алгебраических методов. Решается задача синтеза автоматов на основе построения алгебры их графоидов. С этой целью существующие операции над автоматами переносятся на их графоиды. С учетом дополнительных требований, которые могут возникать при анализе предметной области, вводятся новые операции. Тем самым определяется алгебра графоидов автоматов, позволяющая осуществлять синтез графоидов автоматных моделей с помощью предложенного авторами алгоритма. Доказываются утверждения, подтверждающие корректность этого алгоритма. Рассматривается численный пример синтеза графоида автоматной модели совместного действия функциональных групп в зоне чрезвычайной ситуации.

Ключевые слова: графоиды автоматов, операции над графоидами, алгебра графоидов, параллельная синхронная смена состояний автоматов, параллельная асинхронная смена состояний автоматов, недопустимые состояния, недопустимые вершины, синтез графоидов.

DOI: 10.31857/S0005231025010073, **EDN:** JQFVER

1. Введение

Эффективным аппаратом моделирования динамики функционирования объектов и систем в различных предметных областях являются конечные автоматы [1]. Однако с возрастанием сложности моделируемых объектов и систем значительно увеличивается мощность входного и выходного алфавитов и алфавита состояний автомата, что существенно затрудняет процесс моделирования, делает модели весьма громоздкими и затрудняет возможность интерпретации результатов моделирования.

В этом случае эффективным является использование системного подхода, в соответствии с которым первоначально осуществляется декомпозиция объекта или системы на составляющие, разработка автоматных моделей отдельных составляющих и синтез общей модели [2, 3].

Реализация каждого из перечисленных выше этапов существенно зависит от специфики предметной области моделируемых объектов или систем.

Наиболее сложным является этап синтеза общей модели, поскольку он в наибольшей степени влияет на ее адекватность. Например, в [4, 5] использовались методы теории автоматов для моделирования поведения цифровых двойников производства на основе алгебры автоматов, которая включала не только известные, но и введенные авторами операции над автоматами, учитывающие особенности моделируемого объекта. Другие примеры введения предметноориентированных операций над автоматами и использования алгебры автоматов приведены в [6–8].

Другая проблема, возникающая при синтезе автоматных моделей, заключается в том, что могут существовать значительные ограничения на выбор возможных составляющих общей модели. Если модели составляющих должны соответствовать заданным объектам или системам, то могут накладываться особые требования к процессу синтеза общей модели, заключающиеся в необходимости исключения недопустимых комбинаций состояний составляющих общей модели. Примером может служить задача моделирования совместного действия нескольких функциональных групп, участвующих в ликвидации чрезвычайной ситуации [9, 10]. Ограничения могут быть вызваны, например, требованиями исключения конфликтов между функциональными группами или учетом синергетических эффектов при их совместных действиях [11]. Автоматы, моделирующие функционирование этих групп, выступают в качестве составляющих общей модели процесса ликвидации чрезвычайной ситуации.

Следует заметить, что часто набор состояний составляющих общей модели бывает полностью известен. В этом случае известно представление автомата помеченным графом (графоидом), вершины которого соответствуют состояниям, дуги – переходам между состояниями, а веса дуг описывают реакции автомата на появление различных входных символов. Указанное обстоятельство позволяет осуществлять нахождение графоида общей модели в результате синтеза графоидов автоматных моделей ее составляющих.

Решение указанной задачи может быть получено на основе использования алгебраических методов. В [12, 13] использовалось понятие алгебры конечных детерминированных автоматов на основе введения ряда операций их композиции, которые применимы и для графоидов автоматов. В частности, устанавливались необходимые и достаточные условия декомпозиции автомата в сеть составляющих автоматов на основе вводимых операций и решения автоматных уравнений с помощью специально введенного языка парных алгебр. Используемые подходы естественным образом применимы и для графоидов автоматов, представление которых только дополняется описанием соответствующих автоматов. Однако не во всех предметных областях решение, полученное с использованием описанного в этих работах подхода, может давать содержательный результат, потому что не учитываются возможные ограничения на совместное функционирование составляющих.

В связи с этим актуальной является задача разработки универсального подхода к синтезу графоида общей модели, в котором учитывалось бы наличие ограничений на совместное функционирование моделируемых объектов или систем. В настоящей работе данная задача решается на основе использования алгебраических методов, а также осуществляется обоснование корректности предлагаемого подхода.

2. Алгебра графоидов автоматов

Под алгеброй $\mathcal{A} = \langle \mathcal{N}, \mathcal{S} \rangle$ в соответствии с [14] будем понимать совокупность множества \mathcal{N} с заданными в нем операциями

$$\mathcal{S} = \{f_{11}, f_{12}, \dots, f_{1n_1}, f_{21}, f_{22}, \dots, f_{2n_2}, \dots, f_{m1}, f_{m2}, \dots, f_{mn_m}\},$$

где \mathcal{N} – носитель, \mathcal{S} – сигнатура алгебры (f_{kl} – l -я k -местная операция).

Графоидом G конечного детерминированного неинициального абстрактного автомата Мили A является четверка [15] (Q, F, X, Y) , где Q – множество занумерованных вершин, соответствующих состояниям автомата A ; F – оператор, описывающий взвешенные дуги, т.е. переходы между состояниями и соответствующие им выходные символы в зависимости от поступающих входных символов; X – входной алфавит автомата A ; Y – выходной алфавит автомата A .

Обозначение $A \setminus G$ будем использовать в том случае, если автомату A соответствует графоид G .

Приведем удобные для дальнейшего использования описания оператора F .

Выражение

$$F^{x/y} q^i = q^{i_s}(x/y)$$

означает, что если автомат находится в состоянии, соответствующем вершине графоида q^i и на вход автомата поступает символ $x \in X$, то автомат перейдет в состояние, соответствующее вершине графоида q^{i_s} и будет сгенерирован выходной символ $y \in Y$.

Обозначим

$$Fq^i = \bigcup_{\substack{x \in X \\ y \in Y}} \{F^{x/y} q^i\}.$$

В этих обозначениях результат выполнения оператора F может быть описан как

$$\{Fq^i = \{q^{i_1}(x^{j_1}/y^{k_1}), \dots, q^{i_i}(x^{j_i}/y^{k_i}), \dots, q^{i_{n_i}}(x^{j_{n_i}}/y^{k_{n_i}})\}, i = \overline{1, |Q|}\}.$$

Предполагается, что в общем случае $\{x^{j_1}, \dots, x^{j_{n_i}}\} \subseteq X$, т.е. автомат может являться частичным.

Оператор F может быть представлен в виде символьной матрицы, элементами которой являются пары x/y . Описанная в [3] алгебра таких матриц

упрощает процесс разработки численных методов оперирования с графоидами. Однако при этом необходимо обоснование корректности использования операций.

Введение понятия алгебры графоидов автоматов, в которой в качестве носителя \mathcal{L} выступает некоторое множество графоидов \mathcal{G}_0 , позволяет формализовать процедуру синтеза графоида общей модели объектов или систем, автоматные модели которых описываются графоидами, содержащимися во множестве \mathcal{G}_0 с использованием различных операций.

Обратимся к описанию и обоснованию корректности этих операций.

3. Операции алгебры графоидов автоматов

Определим операцию \times над конечными непустыми попарно непересекающимися множествами $M_1 = \{m_1^1, \dots, m_{|M_1|}^1\}, \dots, M_n = \{m_1^n, \dots, m_{|M_n|}^n\}$:

$$M_1 \times \dots \times M_n = \left\{ \{m_{i_1}^1, \dots, m_{i_n}^n\} \mid i_1 = \overline{1, |M_1|}, \dots, i_n = \overline{1, |M_n|} \right\}.$$

В данном случае \times не является декартовым произведением, так как результат не зависит от порядка выполнения операции. Это позволит обеспечить коммутативность операций над графоидами автоматов.

Пусть $G_1, G_2 \in \mathcal{G}_0$ – графоиды

$$(1) \quad G_1 = (Q_{G_1}, F_{G_1}, X_{G_1}, Y_{G_1});$$

$$(2) \quad G_2 = (Q_{G_2}, F_{G_2}, X_{G_2}, Y_{G_2}).$$

Если графоиды (1) и (2) удовлетворяют условиям

$$(3) \quad Y_{G_1} \cap X_{G_2} = \emptyset;$$

$$(4) \quad Y_{G_2} \cap X_{G_1} = \emptyset,$$

то произведением \times графоидов (1) и (2) называется графоид

$$\Pi = G_1 \times G_2 = (Q_\Pi, F_\Pi, X_\Pi, Y_\Pi),$$

где $q_\Pi \in Q_\Pi$ определяется как $q_\Pi = \{q_{G_1}, q_{G_2}\}$, а $Q_\Pi, F_\Pi, X_\Pi, Y_\Pi$ задаются формулами:

$$Q_\Pi = Q_{G_1} \times Q_{G_2};$$

$$F_\Pi q_\Pi = F_{G_1} q_{G_1} \times F_{G_2} q_{G_2};$$

$$X_\Pi = X_{G_1} \times X_{G_2};$$

$$Y_\Pi = Y_{G_1} \times Y_{G_2}.$$

Графоид Π соответствует параллельному функционированию автоматов, описываемых графоидами G_1 и G_2 , с синхронной сменой состояний.

Если графоиды (1) и (2) удовлетворяют условию

$$(5) \quad X_{G_1} \cap X_{G_2} = \emptyset,$$

то суммой + графоидов (1) и (2) называется графоид

$$\Sigma = G_1 + G_2 = (Q_\Sigma, F_\Sigma, X_\Sigma, Y_\Sigma),$$

где $q_\Sigma \in Q_\Sigma$ определяется как $q_\Sigma = \{q_{G_1}, q_{G_2}\}$, а $Q_\Sigma, F_\Sigma, X_\Sigma, Y_\Sigma$ определяются по формулам

$$\begin{aligned} Q_\Sigma &= Q_{G_1} \times Q_{G_2}; \\ F_\Sigma q_\Sigma &= (F_{G_1} q_{G_1} \times \{q_{G_2}\}) \cup (\{q_{G_1}\} \times F_{G_2} q_{G_2}); \\ X_\Sigma &= X_{G_1} \cup X_{G_2}; \\ Y_\Sigma &= Y_{G_1} \cup Y_{G_2}. \end{aligned}$$

Графоид Σ соответствует параллельному функционированию автоматов, описываемых графоидами G_1 и G_2 , с асинхронной сменой состояний.

Условие (5) позволяет исключить возникновение неопределенности при переходе между состояниями после выполнения операции +, т.е. исключить возможность появления недерминированного автомата.

Заметим, что из определения операций \times и $+$ для графоидов (1) и (2) следует

$$(6) \quad Q_{G_1 \times G_2} = Q_{G_1 + G_2}.$$

Таким образом, описана алгебра $\mathcal{A}_1 = \langle \mathcal{G}_1, \mathcal{S}_1 \rangle$ где $\mathcal{S}_1 = \{\times, +\}$, обладающая следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (G_1 \times G_2) \times G_3 &= G_1 \times (G_2 \times G_3); \\ G_1 \times G_2 &= G_2 \times G_1; \\ (G_1 + G_2) + G_3 &= G_1 + (G_2 + G_3); \\ G_1 + G_2 &= G_2 + G_1. \end{aligned}$$

Тем самым алгебра \mathcal{A}_1 является коммутативной полугруппой по каждой из операций сигнатуры \mathcal{S}_1 .

4. Композиция графоидов

При моделировании реальных систем требуется учет особенностей предметной области, которые приводят к появлению дополнительных требований к осуществлению синтеза автоматных моделей, что, в свою очередь, накладывает некоторые ограничения на операции над их графоидами. К наиболее распространенным требованиям относятся следующие:

- 1) смена состояний одного объекта или системы может инициировать смену состояний другого объекта или системы;
- 2) объект или система, полученные в результате выполнения операций, могут содержать недопустимые состояния.

В связи с этим возникает необходимость расширения сигнатуры \mathcal{S}_1 алгебры \mathcal{A}_1 на основе введения операций, позволяющих учитывать описанные особенности.

Учет первой особенности осуществляется с помощью введения понятия «состояние-триггер», которое предполагает, что переход одного автомата в это состояние инициирует переход другого автомата в некоторое заданное состояние в зависимости от его текущего состояния, т.е. не выполняется хотя бы одно из условий (3) или (4). Рассмотрим процесс функционирования автоматов, которые описываются графоидами (1) и (2), в этом случае.

Если вершина $q_{G_1}^i$ соответствует состоянию-триггер автомата $A_1\langle G_1$, инициирующего смену состояний в автомате $A_2\langle G_2$, то для удобства дальнейшего описания будем обозначать данную вершину как $T_{G_2} q_{G_1}^i$.

Пусть в автомате $A_1\langle G_1$ есть состояние-триггер, соответствующее вершине $T_{G_2} q_{G_1}^i$, и в этом автомате данному состоянию соответствует выходной символ $y_{G_1}^k$. Этот символ одновременно является входным символом автомата $A_2\langle G_2$ и инициирует в нем смену состояния следующим образом: если $A_2\langle G_2$ находился в некотором состоянии, соответствующем вершине $q_{G_2}^s$, и множество его входных символов, при появлении которых осуществляется смена состояния, включает $y_{G_1}^k$, то $A_2\langle G_2$ переходит из состояния, соответствующего вершине $q_{G_2}^s$, в состояние по входному символу $y_{G_1}^k$.

Также возможно, что и автомат $A_2\langle G_2$ инициирует смену состояний автомата $A_1\langle G_1$, т.е. в автомате $A_2\langle G_2$ есть состояние-триггер, соответствующее вершине $T_{G_1} q_{G_2}^i$.

Таким образом, возникает необходимость описания графоида, отображающего совместное функционирование двух автоматов, хотя бы один из которых содержит состояние-триггер, влияющее на функционирование другого.

Если для графоидов (1) и (2) не выполняется хотя бы одно из условий (3) или (4), то композицией \circ графоидов называется графоид

$$K = G_1 \circ G_2 = (Q_K, F_K, X_K, Y_K),$$

если Q_K, F_K, X_K, Y_K удовлетворяют следующим условиям:

$$\begin{aligned} Q_K &= Q_{G_1} \times Q_{G_2}; \\ F_K q_K &= \bigcup_{\substack{t \in Y_{G_2} \\ l \in Y_{G_1}}} F_{G_1}^{t/l} q_{G_1} \times F_{G_2}^{l/t} q_{G_2}; \\ X_K &= X_{G_1} \times X_{G_2}; \\ Y_K &= Y_{G_1} \times Y_{G_2}, \end{aligned}$$

где $F_{G_1}^{t/l} q_{G_1}$ – отображение перехода автомата из состояния, соответствующего вершине q_{G_1} графоида G_1 , при появлении его входного символа $t \in X_{G_1} \cap Y_{G_2}$, при котором на выходе появляется символ $l \in Y_{G_1}$,

$F_{G_2}^{l/t} q_{G_2}$ – отображение перехода автомата из состояния, соответствующего вершине q_{G_2} графоида G_2 , при появлении его входного символа $l \in X_{G_2} \cap Y_{G_1}$, при котором на выходе появляется символ $t \in Y_{G_2}$.

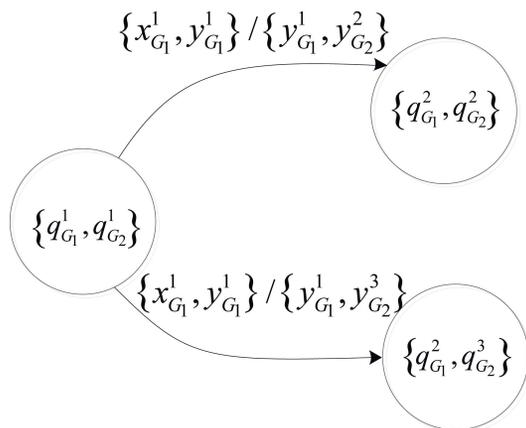


Рис. 1. Графоид подавтомат автомата $A_{1,2}(K)$.

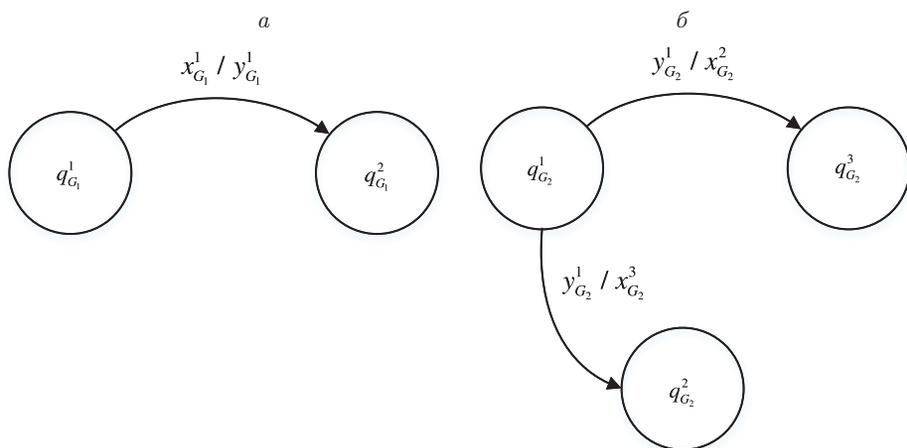


Рис. 2. a – Графоид подавтомата A_1 , $б$ – графоид подавтомата A_2 .

Заметим, что из определения операций \circ , \times и $+$ для графоидов (1) и (2) следует

$$(7) \quad Q_{G_1 \circ G_2} = Q_{G_1 \times G_2} = Q_{G_1 + G_2}.$$

Теорема 1. Пусть графоиды (1), (2) соответствуют детерминированным автоматам A_1 , A_2 и не удовлетворяют хотя бы одному из условий (3) или (4). Тогда $K = G_1 \circ G_2$ является графоидом детерминированного автомата.

Доказательство. Если автомат $A_{1,2}(K)$ является недетерминированным, то без ограничения общности можно считать, что он содержит подавтомат, графоид которого изображен на рис. 1, при этом $y_{G_1}^1 = x_{G_2}^1$.

Тогда в автоматах A_1 и A_2 найдутся подавтоматы, графоиды которых изображены на рис. 2.

Следовательно, в этом случае автомат A_2 является недетерминированным, что противоречит условию теоремы.

Заметим, что вследствие ассоциативности и коммутативности операций \times, \cup операция композиции \circ также обладает этими свойствами:

$$(G_1 \circ G_2) \circ G_3 = G_1 \circ (G_2 \circ G_3);$$

$$G_1 \circ G_2 = G_2 \circ G_1.$$

Очевидно, что если выполняются условия (3) и (4), то $G_1 \circ G_2 = G_1 \times G_2$.

Определим новую алгебру $A_2 = \langle \mathcal{G}_2, \mathcal{S}_2 \rangle$ с сигнатурой $\mathcal{S}_2 = \{\circ, \times, +\}$, которая, как и алгебра A_1 , образует коммутативную полугруппу по каждой операции.

5. Операция фильтрации графоида

После выполнения бинарных операций сигнатуры \mathcal{S}_2 появляется новый графоид алгебры A_2 . Автомат, соответствующий данному графоиду, может не удовлетворять ограничениям на совместное функционирование составляющих общей модели потому, что полученный автомат может содержать недопустимые комбинации их состояний с учетом особенностей предметной области, т.е. в полученном автомате возникают конфликтные ситуации (предполагается, что множество конфликтных ситуаций определяет лицо, принимающее решение). Вследствие этого возникает необходимость введения операции фильтрации ∇ , позволяющей исключать вершины графоида, которые соответствуют недопустимым состояниям автомата. Такие вершины также будем называть недопустимыми.

Заметим, что в [12, 13] изучались только вопросы поиска и удаления недосяжимых состояний автоматов, что способствует снижению размерности задачи, но может не удовлетворять требованиям предметной области.

Обозначим через $\Omega_1, \dots, \Omega_n$ образующие алгебры A_2 , т.е. графоиды, из которых с помощью операций сигнатуры \mathcal{S}_2 могут быть получены все остальные графоиды носителя \mathcal{G}_2 .

Определим множество $\Psi = \{\Psi_1, \dots, \Psi_k, \dots, \Psi_r\}$ недопустимых вершин некоторого графоида. Каждая вершина Ψ_k соответствует множеству $\{q_{\Omega_{k_1}}^{l_{k_1}}, \dots, q_{\Omega_{k_{|\Psi_k|}}^{l_{|\Psi_k|}}}\}$ вершин, образующих алгебры A_2 .

Пусть графоид $H = (Q_H, F_H, X_H, Y_H)$ получен путем преобразований графоидов $G_1, \dots, G_m \in \mathcal{G}_2$ с помощью операций сигнатуры \mathcal{S}_2 . Тогда множество всех вершин графоида H имеет следующий вид:

$$Q_H = \left\{ Q_{G_1}, \dots, Q_{G_m}, \{ Q_{G_{ij}} | Q_{G_{ij}} = Q_{G_i} \times Q_{G_j}, \forall i, j \in \{1, m\}, i \neq j \}, \dots, \right.$$

$$\left. \{ Q_{G_{i_1, \dots, i_n}} | Q_{G_{i_1, \dots, i_n}} = Q_{G_{i_1}} \times \dots \times Q_{G_{i_n}}, \forall i_1, \dots, i_n \in \{1, m\}, i_1 \neq \dots \neq i_n \} \right\}.$$

Определим функцию

$$\pi(q_H, \Psi_k) = \begin{cases} 1, & \text{если } \Psi_k \subseteq q_H, \\ 0, & \text{если иначе.} \end{cases}$$

Тогда вершина $q_H \in Q_H$ недопустима, если

$$\sum_{k=1}^r \pi(q_H, \Psi_k) \neq 0.$$

Обозначим как

$$\Xi_H = \left\{ q_H \in Q_H \mid \sum_{k=1}^r \pi(q_H, \Psi_k) \neq 0 \right\}$$

множество всех недопустимых вершин.

Для исключения недопустимых состояний введем унарную операцию фильтрации ∇ . Графоид $\nabla_{\Xi_H} H$ называется фильтрацией графоида H по множеству Ξ_H , если он является подграфом графоида H с множеством вершин $Q_{\nabla_{\Xi_H} H} = Q_H \setminus \Xi_H$.

Таким образом, получена алгебра $\mathcal{A}_3 = \langle \mathcal{G}_3, \mathcal{S}_3 \rangle$ с сигнатурой $\mathcal{S}_3 = \{\nabla, \circ, \times, +\}$.

6. Алгоритм синтеза графоидов автоматной модели

Для разработки данного алгоритма первоначально определим алгебру графоидов, сигнатура которой содержит только те операции, которые необходимы для решения задачи синтеза графоидов автоматных моделей с учетом описанных выше особенностей.

Рассмотрим одновременно функционирующие автоматы, которые описываются графоидами (1) и (2). Смена их состояний может происходить как одновременно, так и в различные моменты времени. Следовательно, функционирование автоматов может быть:

- либо синхронизировано, что в процессе синтеза описывается
 - операцией \times , если они не содержат триггеры, влияющие на функционирование друг друга;
 - операцией \circ , если они содержат триггеры, влияющие на функционирование друг друга;
- либо быть асинхронным, что описывается операцией $+$.

В процессе синтеза должны быть учтены обе возможности функционирования автоматов. Исходя из этого необходимо объединить операции \circ , \times и $+$. Для этого введем операцию объединения \cup графоидов.

Пусть для графоидов (1) и (2) выполняется условие (5) и $Q_{G_1} = Q_{G_2}$, тогда объединением \cup графоидов называется графоид

$$C = G_1 \cup G_2 = (Q_C, F_C, X_C, Y_C),$$

где Q_C, F_C, X_C, Y_C задаются следующими формулами:

$$\begin{aligned} Q_C &= Q_{G_1} = Q_{G_2}; \\ F_C q_C &= F_{G_1} q_{G_1} \cup F_{G_2} q_{G_2}; \\ X_C &= X_{G_1} \cup X_{G_2}; \\ Y_C &= Y_{G_1} \cup Y_{G_2}. \end{aligned}$$

Данная операция обладает следующими свойствами:

$$\begin{aligned} (G_1 \cup G_2) \cup G_3 &= G_1 \cup (G_2 \cup G_3); \\ G_1 \cup G_2 &= G_2 \cup G_1. \end{aligned}$$

Учитывая свойства (6) и (7) введенных выше операций \circ, \times и $+$, процесс синтеза графоидов автоматных моделей может быть выполнен с помощью следующих комбинаций этих операций:

$$\begin{aligned} G_1 \otimes G_2 &= (G_1 \times G_2) \cup (G_1 + G_2); \\ G_1 \odot G_2 &= (G_1 \circ G_2) \cup (G_1 + G_2). \end{aligned}$$

Полученные после выполнения операций \otimes и \odot синтезируемые графоиды могут соответствовать автоматам, которые содержат недопустимые состояния. Для их исключения необходимо использовать операцию фильтрации ∇ .

Сказанное выше позволяет сделать вывод, что для синтеза графоидов автоматных моделей может быть использована алгебра $\mathcal{A} = \langle \mathcal{G}, \mathcal{S} \rangle$, где $\mathcal{S} = \{ \nabla, \otimes, \odot \}$.

Рассмотрим алгебраические свойства операций сигнатуры \mathcal{S} .

Из коммутативности и ассоциативности операций $\circ, \times, +, \cup$ следует коммутативность и ассоциативность операций \otimes и \odot . Поэтому порядок осуществления синтеза общей модели с их использованием не важен.

Обозначим через \bullet одну из операций множества $\{ \otimes, \odot \}$. Пусть графоиды $G_{i_1}, G_{i_2}, G_{i_3}, \dots, G_{i_s}$ получены путем преобразований графоидов $G_1, \dots, G_m \in \mathcal{G}$ с помощью операций сигнатуры \mathcal{S} . Тогда справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.

$$\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s}) = \nabla \left(\nabla \left(\dots \left(\nabla \left((\nabla G_{i_1}) \bullet G_{i_2} \right) \bullet G_{i_3} \right) \bullet \dots \right) \bullet G_{i_s} \right).$$

Доказательство. Воспользуемся методом математической индукции.

Пусть $\Xi_{G_{i_t}}$ – множество недопустимых вершин графоида G_{i_t} , а множество Ξ содержит все возможные недопустимые вершины комбинаций графоидов $G_{i_1}, G_{i_2}, G_{i_3}, \dots, G_{i_s}$.

1) Если $s = 2$, докажем, что $\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2}) = \nabla((\nabla G_{i_1}) \bullet G_{i_2})$.

Множество вершин $\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2})$ имеет вид $Q_{G_{i_1} \bullet G_{i_2}} = \widehat{Q}_{G_{i_1} \bullet G_{i_2}} \setminus \Xi$, а множество вершин $\nabla((\nabla G_{i_1}) \bullet G_{i_2})$ имеет вид $Q_{G_{i_1} \bullet G_{i_2}} = ((\widehat{Q}_{G_{i_1}} \setminus \Xi_{G_{i_1}}) \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}) \setminus \Xi$.

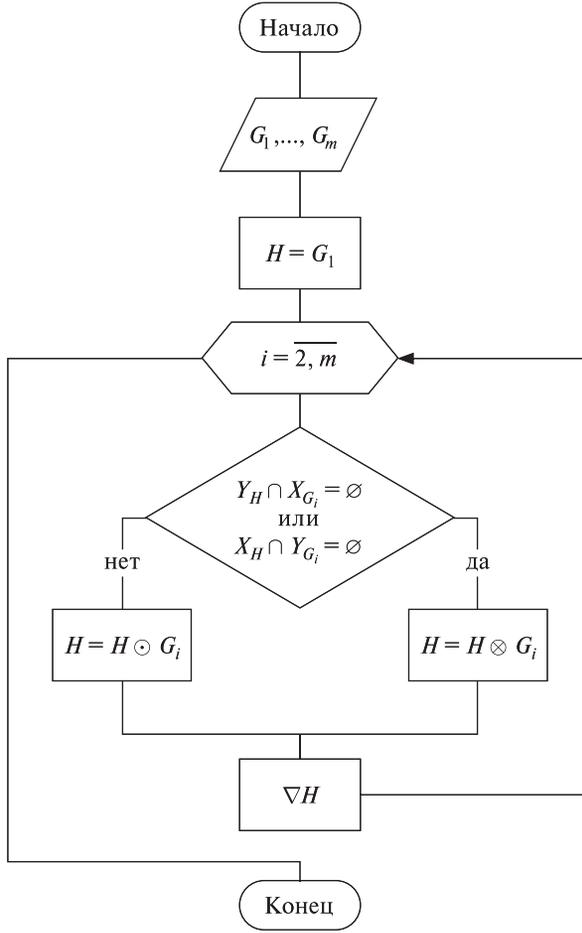


Рис. 3. Алгоритм синтеза графоидов автоматных моделей.

Преобразуем последнее выражение:

$$\begin{aligned}
 (8) \quad Q_{G_{i_1} \bullet G_{i_2}} &= \left((\widehat{Q}_{G_{i_1}} \setminus \Xi_{G_{i_1}}) \times \widehat{Q}_{G_{i_2}} \right) \setminus \Xi = \\
 &= \left((\widehat{Q}_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}) \setminus (\Xi_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}) \right) \setminus \Xi.
 \end{aligned}$$

Во множестве $\Xi_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}$ все вершины являются недопустимыми, следовательно, $\Xi_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}} \subseteq \Xi$, и выражение (6) можно переписать в следующем виде: $(\widehat{Q}_{G_{i_1}} \times \widehat{Q}_{G_{i_2}}) \setminus \Xi$, что соответствует $\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2})$.

- 2) Предположим, что для $s = k$ утверждение верно, докажем, что оно верно для $s = k + 1$.

Имеем

$$\begin{aligned}
 &\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s} \bullet G_{i_{s+1}}) = \\
 &= \nabla \left(\nabla \left(\nabla \left(\dots \left(\nabla \left(\nabla(G_{i_1}) \bullet G_{i_2} \right) \bullet G_{i_3} \right) \bullet \dots \right) \bullet G_{i_s} \right) \bullet G_{i_{s+1}} \right),
 \end{aligned}$$

так как графоиды $G_{i_1}, G_{i_2}, G_{i_3}, \dots, G_{i_s}$ получены путем преобразований с помощью операций сигнатуры \mathcal{S} , то выражение $G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s}$ можно заменить на эквивалентный графоид $H = G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s}$. Тогда получаем, что выражение $\nabla(G_{i_1} \bullet G_{i_2} \bullet G_{i_3} \bullet \dots \bullet G_{i_s} \bullet G_{i_{s+1}})$ имеет вид $\nabla(H \bullet G_{i_{s+1}})$. Следовательно, необходимо показать справедливость равенства $\nabla(H \bullet G_{i_{s+1}}) = \nabla((\nabla H) \bullet G_{i_{s+1}})$, что было сделано в пункте 1).

Таким образом, алгоритм синтеза графоидов из \mathcal{G} имеет вид, приведенный на рис. 3. Его корректность вытекает из описанных выше алгебраических свойств операций сигнатуры \mathcal{S} и доказанной выше теоремы.

7. Численный пример

В качестве примера рассмотрим процесс контроля доступа в зону чрезвычайной ситуации, организации поиска пострадавших и эвакуации людей и материальных ценностей из этой зоны [10], что предполагает использование следующих штатных функциональных групп:

- 1) организации доступа в зону чрезвычайной ситуации, действия которой моделируются автоматом $A_1 \langle (G_1 = (Q_{G_1}, F_{G_1}, X_{G_1}, Y_{G_1})) \rangle$;
- 2) организации поиска людей и материальных ценностей, подлежащих эвакуации, действия которой моделируются автоматом $A_2 \langle (G_2 = (Q_{G_2}, F_{G_2}, X_{G_2}, Y_{G_2})) \rangle$;
- 3) организации эвакуации в безопасный район, действия которой моделируются автоматом $A_3 \langle (G_3 = (Q_{G_3}, F_{G_3}, X_{G_3}, Y_{G_3})) \rangle$.

В процессе развития чрезвычайной ситуации перечисленные функциональные группы могут находиться в состояниях, которые соответствуют указанным в таблице вершинам.

Описание вершин графоидов, соответствующих состояниям автоматов $A_1 \langle G_1, A_2 \langle G_2, A_3 \langle G_3$, моделирующих действия функциональных групп

$q_{G_1}^1$	Полный контроль периметра зоны чрезвычайной ситуации
$q_{G_1}^2$	Осуществление пропускного режима
$q_{G_2}^1$	Ожидание в исходном районе
$q_{G_2}^2$	Выдвижение в район поиска
$q_{G_2}^3$	Поиск подлежащих эвакуации людей и материальных ценностей
$q_{G_2}^4$	Сопровождение подлежащих эвакуации людей и материальных ценностей на сборный эвакуационный пункт
$q_{G_3}^1$	Ожидание формирования колонны для эвакуации
$q_{G_3}^2$	Учет пострадавших и формирование колонны для эвакуации
$q_{G_3}^3$	Движение в безопасную зону

Графоиды G_1, G_2, G_3 автоматов A_1, A_2, A_3 приведены на рис. 4–6.

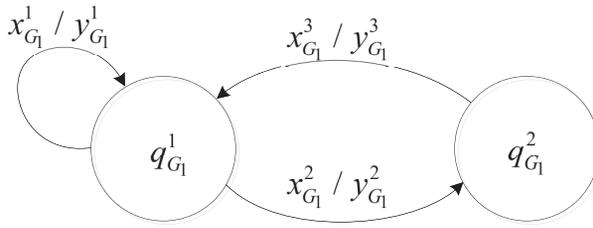


Рис. 4. Графоид G_1 .

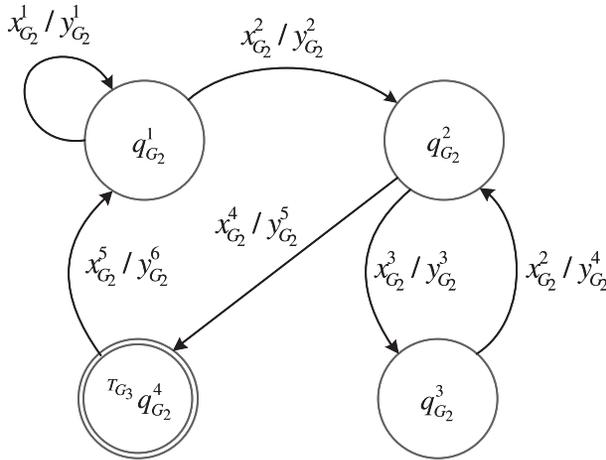


Рис. 5. Графоид G_2 .

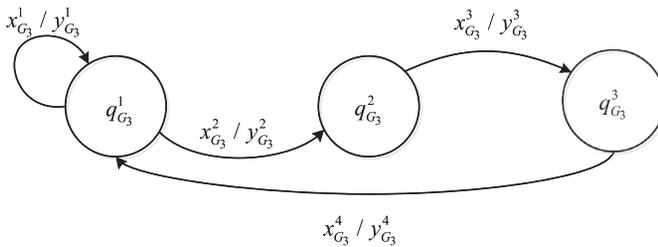


Рис. 6. Графоид G_3 .

Необходимо синтезировать с использованием разработанной алгебры \mathcal{A} графоид H , определяющий совместную деятельность функциональных групп. Анализ поставленной задачи позволил выявить:

– потенциальные конфликтные ситуации и определить множество недопустимых вершин

$$\Xi = \left\{ \{q_{G_1}^1, q_{G_2}^2\}, \{q_{G_1}^2, q_{G_2}^1\}, \{q_{G_1}^2, q_{G_2}^3\}, \{q_{G_1}^2, q_{G_2}^4\}, \right. \\ \left. \{q_{G_1}^1, q_{G_2}^4, q_{G_3}^1\}, \{q_{G_1}^1, q_{G_2}^4, q_{G_3}^3\} \right\};$$

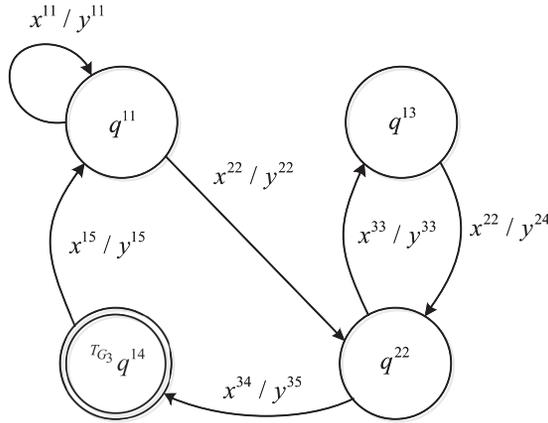


Рис. 7. Графоид $H = \nabla(G_1 \otimes G_2)$.

– необходимость инициирования действия автомата A_3 автоматом A_2 : если выходной символ автомата A_2 есть $y_{G_2}^5$, то входной символ автомата A_3 есть $x_{G_3}^2$.

Например, состояние, соответствующее вершине $\{q_{G_1}^2, q_{G_2}^3\}$, является конфликтным из-за того, что функциональная группа, описываемая автоматом A_1 , осуществляет выдвигание в район поиска в тот момент, когда функциональная группа, описываемая автоматом A_2 , осуществляет контроль территории.

Опишем процесс синтеза графоида H в соответствии с приведенным на рис. 1 алгоритмом.

На первой итерации осуществляется синтез графоидов H и G_2 :

принимается, что $H = G_1$ и $Y_H = Y_{G_1}$;

в связи с отсутствием состояний-триггеров, так как $Y_H \cap X_{G_2} = \emptyset$, выполняется действие $H = H \otimes G_2$;

исключаются недопустимые состояния, определяемые вершинами $\{q_{G_1}^1, q_{G_2}^2\}$, $\{q_{G_1}^2, q_{G_2}^1\}$, $\{q_{G_1}^2, q_{G_2}^3\}$, $\{q_{G_1}^2, q_{G_2}^4\}$ графоида H , т.е. выполняется действие $H = \nabla H$, данный графоид представлен на рис. 7, где вершины $q^{ij} = \{q_{G_1}^i, q_{G_2}^j\}$, входные символы $x^{ij} = \{x_{G_1}^i, x_{G_2}^j\}$ и выходные символы $y^{ij} = \{y_{G_1}^i, y_{G_2}^j\}$.

На следующей итерации осуществляется синтез графоидов H и G_3 :

так как $Y_H \cap X_{G_3} \neq \emptyset$ выполняется действие $H = H \odot G_3$;

исключаются недопустимые вершины $\{q_{G_1}^1, q_{G_2}^4, q_{G_3}^1\}$, $\{q_{G_1}^1, q_{G_2}^4, q_{G_3}^3\}$ графоида H , т.е. выполняется действие $H = \nabla H$, полученный графоид изображен на рис. 8, вершины $q^{ijk} = \{q_{G_1}^i, q_{G_2}^j, q_{G_3}^k\}$.

Таким образом, графоид H соответствует автомату, который описывает параллельное синхронное, асинхронное функционирование автоматов A_1, A_2 , а также инициализацию переходов состояний автомата A_3 .

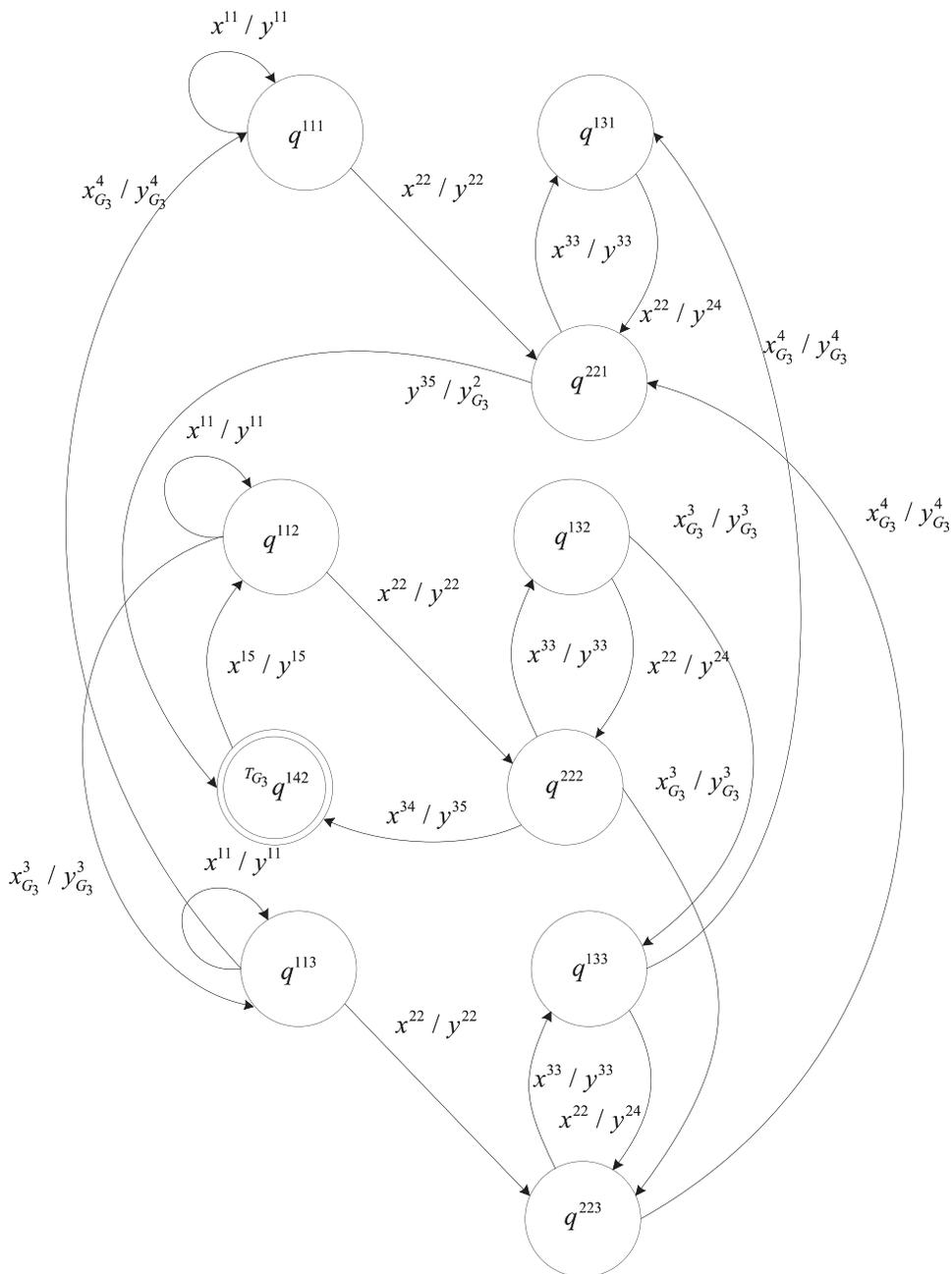


Рис. 8. Графоид $= \nabla(\nabla(G_1 \otimes G_2) \odot G_3)$.

В полученном графоиде H учитываются все взаимосвязанные действия трех штатных функциональных групп, деятельность которых направлена на процесс контроля доступа в зону чрезвычайной ситуации, организации поиска пострадавших и эвакуации людей и материальных ценностей из этой зоны.

8. Заключение

В статье построена алгебра графоидов автоматов, позволяющая синтезировать графоид общей модели функционирования автоматов. При построении алгебры частично осуществлялся перенос операций над автоматами на графоиды этих автоматов, а также вводились операции с учетом дополнительных требований предметной области. Разработан алгоритм синтеза графоидов автоматов на основе этой алгебры, который позволяет построить обобщенную модель функционирования объектов независимо от последовательности их соединения в силу коммутативности операций.

Приведен численный пример синтеза графоида автомата, который описывает взаимосвязанные действия трех функциональных групп, используемых при возникновении чрезвычайной ситуации. Данные функциональные группы осуществляют контроль доступа в зону чрезвычайной ситуации, организацию поиска пострадавших и эвакуации людей и материальных ценностей из этой зоны.

В результате получен математический аппарат, позволяющий моделировать совместные действия функциональных групп, участвующих в ликвидации чрезвычайной ситуации. Данный математический аппарат в дальнейшем, за счет наполнения содержанием входных и выходных символов автоматов, может быть использован в моделях оценки эффективности действий функциональных групп и оптимизации выбора состава и тактики их использования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Калман Р.Э., Фалб П.Л., Арbib М.А.* Очерки по математической теории систем. Пер. с англ. Наппельбаума Э.Л. Под ред. Цыпкина Я.З. М.: Едиториал УРСС, 2004. 400 с.
2. *Сысоев В.В., Меньших В.В., Солодуха Р.А., Забияко С.В.* Исследование взаимодействий в сети конечных детерминированных автоматов // Радиотехника. 2000. № 9. С. 65–67.
3. *Меньших В.В., Никитенко В.А.* Численный метод агрегирования автоматных моделей с использованием алгебраических операций над автоматами // Проблемы управления. 2023. № 6. С. 66–75.
4. *Гапанович Д.А., Сухомлин В.А.* Алгебра конечных автоматов как математическая модель цифрового двойника умного производства // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18. № 2. С. 353–366.
5. *Гапанович Д.А., Сухомлин В.А.* Моделирование функционирования шахты средствами алгебры конечных автоматов ДТА // Современные информационные технологии и ИТ-образование. 2022. Т. 18. № 3. С. 634–643.
6. *Volkova K.M.* Conducting a synthesis of a digital automaton for an automated firefighting system // Bulletin of the South Ural State University. Series: Computer Technologies, Automatic Control, Radio Electronics. 2021. Vol. 21. No. 1. P. 49–58.

7. Широкова Е.В., Евтушенко Н.В. Синтез безопасных компонентов веб-сервисов на основе решения автоматных уравнений // Современная наука: актуальные проблемы теории и практики. Сер.: Естеств. и техн. науки. 2023. № 8. С. 143–150.
8. Соловьев В.В. Синтез быстрых конечных автоматов на программируемых логических интегральных схемах путем расщепления внутренних состояний // Изв. РАН. Теория и системы управления. 2022. № 3. С. 69–80.
9. Меньших В.В., Корчагин А.В. Структурные модели взаимодействия подразделений силовых ведомств при возникновении чрезвычайных ситуаций техногенного характера // Тр. Академии управления МВД России. 2015. № 2(34). С. 54–58.
10. Меньших В.В., Саморожковский А.Ф., Серeda Е.Н., Горлов В.В. Моделирование коллективных действий сотрудников органов внутренних дел. Воронеж: Воронеж. ин-т МВД РФ, 2017. 236 с.
11. Меньших В.В., Горлов В.В., Нижитенко В.А. Учет синергетических эффектов при композиции автоматных моделей действий подразделений силовых ведомств, участвующих в ликвидации чрезвычайных обстоятельств // Вестн. Воронеж. ин-та МВД России. 2023. № 2. С. 60–68.
12. Harmanis J., Stearns R. Algebraic structure theory of sequential machines. N.-Y.: Prentice-Hall Inc., 1966. 211 p.
13. Villa T., Yevtushenko N., Brayton R.K., Mishchenko A., Petrenko A., Sangiovanni Vincentelli A.L. The unknown component problem: theory and applications. Springer, 2012. 311 p.
14. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики. Информационная математика. М.: Наука. Физматлит, 2000. 544 с.
15. Мелихов А.Н. Ориентированные графы и конечные автоматы. М.: Наука, 1971. 416 с.

Статья представлена к публикации членом редколлегии М.Ф. Караваем.

Поступила в редакцию 10.04.2024

После доработки 24.07.2024

Принята к публикации 02.09.2024